TUGAS MANDIRI

MATRIKS

Mata Kuliah : Matematika ekonomi

NamaMahasiswa : Suriani

NIM : 140610098

Kode Kelas : 141-MA112-M6

Dosen : NeniMarlinaPurbaS.Pd

UNIVERSITAS PUTERA BATAM

2014

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat tuhan yang maha esa atas segala berkat serta anugerahnya sehingga saya dapat menyelesaikan penyusunan makalah ini dengan baik dan dalam bentuk yang sederhana. Semoga makalah ini dapat dipergunakan sebagai salah satu acuan petunjuk maupun pedoman bagi pembaca mengenai pengetahuan dasar mengenai matriks.

Pada pokok pembahasan,disajikan materi mengenai matriks dan jenis serta hal-hal yang behubungan dengan matriks.
Dalam makalah ini,saya tidak lupa menyajikan contoh aplikasi matriks dalam bisnis dan manajemen dan dapat anda lihat pada bab pembahasan.

Harapan saya semoga makalah ini menambah pengetahuan dan pengalaman bagi pembaca, walaupun saya akui masih banyak terdapat kekurangan dalam penyajian makalah ini.

Akhir kata saya sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan makalah ini. Saya sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk pembuatan makalah berikutnya, terima kasih.

Batam,22 Oktober 2014

Suriani

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Matriks yang sering dijumpai adalah matriks yang entri-entrinya bilangan-bilangan real atau kompleks. Seperti diketahui bahwa himpunan bilangan real merupakan field terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Salah satu contoh matriks yang entri-entrinya merupakan field adalah matriks yang dapat didiagonalisasi. Matriks yang dapat didiagonalisasi banyak diterapkan dalam berbagai ilmu khususnya dalam matematika sendiri.

Beberapa referensi menjelaskan tentang matriks yang dapat didiagonalisasi, pertama diberikan matriks A yang berukuran n x n, maka dicari matriks taksingular P yang mendiagonalkan A, sedemikian hingga diperoleh suatu matriks diagonal D = P-JAP. Matriks taksingular P, diperoleh dengan cara mencari nilai eigen dari matriks A, kemudian ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen yang diperoleh tadi. Tiap-tiap vektor eigen yang diperoleh tadi membentuk kolom-kolom matriks taksingular P. Kemudian dilakukan pendiagonalan, yaitu dengan mencari vektor eigen yang bebas linear satu sarna lain, dan seterusnya. Pembahasan mendasar mengenai matriks terutarna yang berkaitan dengan matriks yang dapat didiagonalisasi ini, telah jelas dikemukakan dan disajikan dalam sejumlah buku referensi yang biasanya digunakan oleh para mahasiswa sebagai salah satu buku perkuliahan umum. Tetapi dilain pihak, akan muncul suatu masalah bagaimana jika ada sebuah contoh yang lain untuk matriks yang dapat didiagonalisasi sehingga ada suatu matriks bujur sangkar A 1.

BAB II

PEMBAHASAN

2.1 MATRIKS

2.1.1 Definisi matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang diatur dalam baris-baris dan kolom-kolom berbentuk persegi panjang serta termuat diantara sepasang tanda kurung.

Matriks dapat dinyatakan sebagai : $A_{m \times n} = |a_{ij}|_{m \times n}$

Dimana : a_{ij} = elemen atau unsure matriks

I = 1,2,3,… m, indeks baris

J = 1,2,3,.. n, indeks kolom

Matriks dinyatakan dalam huruf besar A,B,P, atau huruf yang lain.

unsur matriks :

Jumlah baris = M

Jumlah kolom = N

Ordo atau ukuran matriks = m x n

Elemen-elemen diagonal = a_{11}, a_{22},… a_{mn}

Matriks dapat didefinisikan juga sebagai kumpulan beberapa vector kolom atau vector baris.

2.1.2 Jenis-jenis matriks

Berdasarkan susunan elemen matriks

- **Matriks kuadrat/bujur sangkar**

  Matriks bujur sangkar (square matrix) adalah matriks dimana jumlah baris (M) sama dengan jumlah kolom (N) atau M = N

  Contoh : Matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Bujur sangkar berorde 2

- **Matriks Nol**

  Matriks nol (null matrix) adalah matriks dimana semua elemennya mempunyai nilai nol (0).

  Contoh : Matriks B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **Matriks diagonal**

  Matriks diagonal (diagonal matrix) adalah matriks dimana semua elemen diluar diagonal utamanya adalah nol (0) dan minimal ada 1 elemen pada diagonal utamanya bukan nol.

  Contoh : Matriks $A_{3X3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- **Matriks kesatuan/identitas**

  Matriks ini ditulis dengan l. jenis matriks bujur sangkar yang semua elemen diagonalnya sama dengan 1.

  Contoh : Matriks $l_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriks scalar**

  Matriks scalar (scalar matrix) adalah matriks diagonal dimana elemen pada diagonal utamanya bernilai sama tetapi bukan 1 atau nol.

  Contoh : $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

- **Matiks tridiagonal**

  Matriks tridoagonal (tridiagonal matrix) adalah diagonal dimana elemen sebelah kiri dan kanan diagonal utamanya bernilai tidak sama dengan nol (0).

  Contoh : $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

- **Matriks segitiga bawah**

  Matriks segitiga bawah (lower triangular matrix, L) adalah matriks diagonal dimana elemen disebelah kiri (bawah) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol.

  Contoh : $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriks segitiga atas**

Matriks segitiga atas (upper triangular matrix,U) adalah matriks diagonal dimana elemen disebelah kanan (atas) diagonal utamanya ada yang bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh : U $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

- **Matriks simetris**

Matriks simetris (symmetric matrix) adalah matriks bujur sangkar dimana diagonal utamanya berfungsi sebagai cermin atau refleksi ($A' = A$)

Contoh : $A_{3X3} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

- **Matriks miring**

Matriks miring (skew matrix) adalah matriks bujur sangkar dimana elemen diagonal ke a_{ij} dengan $-a_{ij}$ atau ($a_{ij} = -a_{ij}$) untuk semua I dan j tetapi elemen diagonal utama tidak semua nya bernilai nol.

Contoh : M $= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

- **Matriks miring simetris**

Matriks miring simetris (skew-symmetric matrix) adalah matriks bujur sangkar dimana elemen ke a_{ij} sama dengan $-a_{ij}$ atau ($a_{ij} = a_{ij}$) untuk semua I dan j dan semua elemen diagonal utama bernilai nol.

Contoh : M $= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ berlaku $M^T = -M$

Berdasarkan sifat operasi matriks

- **Matriks singular**

Matriks singular (singular matrix) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

Contoh : A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

- **Matriks non singular**

  Matriks non singulars (non singular matrix) adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol.

  Contoh : A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

- **Matriks hermit**

  Matriks hermit (hermit matrix) adalah matriks bujur sangkar yang transpose conjugatenya sama dengan matriks itu sendiri atau M^T = Conjugate kompleks matriks M.

  Contoh :

  M = $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{M}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix}$

  $\overline{M^T} \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ = M

- **Matriks hermit miring**

  Matriks hermit miring (skew hwrmit matrix) adalah matriks bujur sangkar yang transpose conjugatenya sama dengan negative matriks itu sendiri atau M^r = -M

  Contoh :

  M= $\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$,M

  =$\begin{bmatrix} -1 & 1+I & 2 \\ -1+i & -3i & -i \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,M= $\begin{bmatrix} -1 & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ = -M

- **Matriks uniter**

  Contoh :

  M = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{bmatrix}$, M = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}$,dan M^T = $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

  MM^T = $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -i^2 & 0 \\ o & -i^2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Matriks uniter**

Matriks uniter (uniter matrix) adalah bujur sangkar yang transposenya sama dengan invers conjugatenya atau $M^T = \overline{M}^T$ Atau $\overline{MM}^T$ = MM^T = 1

- **orthogonal**

Matriks orthogonal (orthogonal matrix) adalah matriks bujur sangkar yang transpose nya sama dengan invers nya atau $M^T = M^{-1}$ ATAU $M^TM = 1$

Contoh :

$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ Dan $M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$M^TM = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

- **Matriks normal**

Matriks normal (normal matrix) adalah bujur sangkar yang mempunyai sifat : $M\overline{M}^T = \overline{M}^T$

Contoh :

$M = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 1 \end{bmatrix}$

$\overline{M}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$

$M\overline{M}^T = M^TM = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4+2i \\ 4-2i & 2 \end{bmatrix}$

$=2 \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix} = 2\overline{M}^T$

- **Matriks involunter**

Matriks involunter (involunter matrix) adalah matriks yang jika dikalikan dengan matriks itu sendiri akan menghasilkan matriks identitas atau $M^2 = 1$

Contoh :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$M^2 = M_1 M = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

- **Matriks idempotent**

Matriks idempotent (idempotent matrix) adalah matriks yang jika dikalikan dengan matriks itu sendiri akan menghasilkan matriks asal atau $M^2 = M$.

Contoh :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = M$$

- **Matriks nilpotent**

Matriks nilpotent (nilpotent matrix) adalah matrix bujur sangkar dimana berlaku $A^3 = 0$ Atau $A^n = 0$, bila n = 1,2,3,..

Contoh :

Matriks nilpotent daro ordo 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

2.2 Transpose matriks

Jika M adalah matriks ukuran m x n maka transpose dari A dinyatakan oleh A^T, $A^{1,}$ atau $A^{'}$. Didefinisikan menjadi matriks n x m yang merupakan hasil dari pertukaran baris dan kolom dari matriks A.

A_{mxn} (A_{ij}),

Dimana : $B_{ij} = A_{ij}$

Contoh :

Tentukan transpose dari matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.1 Sifat-sifat matriks transpose

Transpose dari transpose suatu matriks adalah jumlah atau selisih matriks masing-masing transpose. Dan ini dapat ditulis dengan,

$[A']$' = A

Transpose dari suatu jumlah atau selisih matriks adalah jumlah atau selisih matriks masing-masing transpose. Dan ini dapat ditulis dengan,

$[A \pm B]$' = A' + B'

Transpose dari suatu hasil kali matriks adalah perkalian dari transpose-transpose dalam urutan yang terbalik. Hal ini dapat ditulis dengan,

$[AB]$' = B' + A' atau $[ABC]$' = C,B,A,.

2.3 Operasi matriks

2.3.1 Definisi operasi matriks

Operasi matriks adalah operasi aljabar terhadap dua atau lebih matriks yang meliputi :

2.3.2 Penjumlahan dan pengurangan

Jumlah matriks A dan B apabila ditulis A + B adalah sebuah matriks baru yaitu matriks C.

Contoh :

Diketahui bahwa matriks $A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

- **Operasi penjumlahan**

  Matriks $A_1 + B_1 = \begin{bmatrix} 2+2 \\ -1+2 \\ 3+-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

  Matriks $A_2 + B_2 = \begin{bmatrix} 3+1 \\ 4+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

- **Operasi pengurangan**

  Matriks $A_1 + B_1 = A_1 + (-B_1)$

  Matriks $A_1 - B_1 = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -1-2 \\ 3-(-1) \end{bmatrix}$

  Matriks $A_2 + B_2 = \begin{bmatrix} 3-0 & 1-2 \\ 4-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3-1 \end{bmatrix}$

2.3.3 Perkalian scalar matriks

Apabila ƙ adalah suatu bilangan dan a = $a_{ij.}$ Maka perkalian ƙ dengan matriks A dapat ditulis :

A = ƙ (a_{ij}) (ƙ a_{ij})

Dengan kata lain, matriks ƙA diperoleh dari perkalian semua elemen matriks A dengan ƙ

Contoh :

Diketahui bahwa matriks $B = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 21 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ dan ƙ = -1

Tentukanlah ƙ B tersebut !

Jawab :

$ƙB = \begin{bmatrix} -1x12 & -1x9 & -1x2 \\ -1x9 & -1x0 & -1x-3 \end{bmatrix}$

$ƙB = \begin{bmatrix} -12 & -9 & -21 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2.3.4 Perkalian matriks

Perkalian matriks tidak komutatif maksudnya bila matriks A dalam AB ≠ BA

Sistem persamaan linear A_x = d adalah non singular, maka A^{-1} bisa dicari dan penyelesaian system akan menjadi $X^l = A^{-1}$ d

Apabila matriks A = (a_{ij}) berorde (pxq) dan matriks B (b_{ij}) berorde (qxr), maka perkalian matriks A dan B dapat ditulis sebagai matriks baru,yaitu matriks C = A X B.

Contoh :

Diketahui bahwa matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tentukanlah matriks C = matriks A X Matriks B.

Jawab :

A (2x3)Xb(3x3) = C(2X3)

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x3 + 2x2 + 0x1 & 4x1 + 2x1 + 0x0 & 4x\text{-}5 + 2x0 + 0x1 \\ 1x3 + 3x2 + \text{-}1x1 & 1x1 + 3x1 + \text{-}1x0 & 1x\text{-}5 + 3x0 + \text{-}1x0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 6 & -20 \\ 8 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

- **Sifat perkalian matriks**

Jika A adalah matriks ukuran mxn. Matriks B dan C mempunyai ukuran yang memungkinkan untuk operasi penjumlahan dn perkalian. Maka,

A (BC) = A (BC) $\rightarrow Asosiatif$

A (B+C) = AB + AC $\rightarrow Distributif\ kiri$

(B+C) A = (BA +C) $\rightarrow Distributif\ kanan$

r (AB) = (rA) B $\rightarrow r = Skalar$

ImA = A= AIn $\rightarrow asosiatif$

2.3.5 Perkalian langsung

Pembagian matriks biasanya dilakukan pada matriks bujur sangkar jika A dan B matriks sama ukuran MxN (m = n) maka pembagian matriks A dan B sebagai berikut :

$C_{mxn} = \frac{A_{mxn}}{B_{mxn}} \rightarrow C = A.B^{-1}$

$D_{mn} = \frac{B_{mxn}}{A_{mxn}} \rightarrow D = B.A^{-1}$

A^{-1} Dan B^{-1}masing-masing adalah invers matriks A dan B

$A.A^{-1} = 1$

$B.B^{-1} = 1$

Contoh :

Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tentukanlah C = $\frac{A}{B}$

Solusi :

$$C = \frac{A}{B} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \rightarrow C \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.6 Pangkat suatu matriks

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar dan p dan q bilangan bulat positif, maka pangkat dari matriks A sebagai berikut :

$A^P \; A^q = (A)^{P+q}$

$(A^p)^q = A^{pq}$

Contoh :

Jika diketahui matriks berikut A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan dan buktikan :

A^3

$A^2A = A^{2+1} = A^3$

$(A^2)^2 = A^{2X2} = A^4$

Jawab :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^2A = A^2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 20 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

2.3.7 Operasi baris elementer

Operasi baris elementer (OBE) dalah menukar suatu baris matriks dengan baris matriks yang lainnya atau mengalikan suatu baris dengan bilangan k (scalar) dimana $k > 0$ kemudian hasilnya ditambahkan kebaris lainnya pada matriks.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{12}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{3x3}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{b22(a)} b_2 = b_2 + 4b_3$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 27 & 37 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$B_{23}(4)$: b_2 (baru) = b_2(lama) + 4 x b_3

B_2 = 3 6 9

$4b_3$ = 0 20 28

B_2 = 3 26 37 (baris b_2 baru)

2.4 Dekomposisi matriks

2.4.1 Definisi dekomposisi matriks

Dekomposisi matriks adalah transformasi atau modifikasi dari suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah (L) dan atau matriks segitiga atas (U).

2.4.2 Metode crout

Metode crout adalah mengkombinasi suatu matriks untuk memperoleh elemen diagonal utama matriks segitiga atas (U) bernilai 1 dan elemen lainnya bernilai bebas.

Contoh :

Dekomposisi matriks A berikut menjadi matriks segitiga bawah (L) dan segitiga atas (U).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 11_{12} & 24_{13} \\ 0 & 1 & 24_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Metode Doolittle

Metode ini mengkombinasi suatu matriks untuk memperoleh elemen diagonal utama matriks segitiga bawah (L) bernilai 1 dan elemen lainnya bernilai bebas.

Contoh :

Dekombinasi matriks unsur A berikut menjadi matriks segitiga bawah (L) dan segitiga atas (U)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1_{21} & 1 & 0 \\ 1_{31} & 1_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.4 Metode cholesky

Metode ini mengkomposisi suatu matriks untuk memperoleh elemen diagonal utama matriks sigitiga atas (U) dan matriks segitiga bawah (L) adalah sama.

Contoh :

Dekomposisi matriks berikut menjadi matriks segitiga bawah (L) dan segitiga atas (U).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.5 Metode eliminasi gauss

Matriks segitiga bawah

Eliminasi gauss mengubah suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah (L).

Contoh :

Dekomposisi matriks berikut menjadi matriks segitiga bawah (L)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & 0 \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{14(-2)} \\ b_{24(-1)} \\ b_{34(-2)}}} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{34(1)} \\ b_{23(-1)}}}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{12(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi , L = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks segitiga atas

Eliminasi gauss merubah matriks menjadi matriks segitiga atas (U) menggunakan operasi baris elementer (OBE).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = U$$

Contoh :

Tentukan determinan matriks A berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} = U$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & 0 \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{14(-2)} \\ b_{24(-1)} \\ b_{34(-2)}}} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{13(1)} \\ b_{23(-1)}}}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{12(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L$$

Jadi, det A $I_{11} \ X \ I_{22} \ X \ I_{33} \ X \ I_{44}$ = 3 X 2 X 1 X 1 = 6

2.4.6 Minor dan kofaktor matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dimana f = indeks baris dan f_1 = indeks kolom

Minor (M) dari A

$M_{ij} = \left|(a_{ij})\right|$, dimana baris I dan j dihilangkan.

Contoh :

Tentukan minor dan kofaktor dari matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi :

Minor dan kofaktor dari matriks A

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 15 – 18 = -3$ $K_{11} = (-1^{1-1})(-3) = -3$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 – 12 = -2$ $K_{12} = \left(-1^{1-2}(-2)\right) = 2$

2.4.7 Matriks adjoint

Matriks adjoint adalah adalah matriks kofaktor dari suatu matriks (misalkan matriks A) , Maka transpose dari matriks kofaktor disebut matriks adjoint Anxn . dalam mencari matriks adjoint, maka kita harus melakukan ekspansi baris dan kolom untuk semua elemen. Tidak seperti dalam mencari determinan dimana hanya satu baris atau kolom saja yang diekspansi. Misal ada matriks bujur sangkar berorde 3, maka akan ada 9 elemen yang harus dicari kofaktornya.

Contoh :

Akan dicari matriks adjoint dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Maka kofaktornya $C_A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$

$C_{11} = +\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$ $C_{21} = -\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $C_{31} = +\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} =$

$C_{12} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$ $C_{22} = +\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $C_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$C_{13} = +\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$ $C_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $C_{33} = +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} =$

Maka $C_A =$ an Adj A= $C_A{}^T =$

2.5 Determinan matriks

2.5.1 Definisi determinan matriks

Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen matriks bujur sangkar.

Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar (matriks kuadrat).

Notasi determinan matriks A :

$[\det(A) = |A| \; atau \det A = IA]$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

2.5.2 Metode sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks ukuran 2x2 dan 3x3. Determinan matriks yang ukurannya lebih besar dari 3x3 tidak bias dihitung menggunakan metode sarrus.

Contoh :

Tentukan deteminan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Solusi :

Det (A) = $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ = 2 x 4 – 1 x (-3) = 8 – (-3) = 3

2.5.3 Metode minor dan metode kofaktor

Perhitungan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor diterapkan pada semua ukuran matriks bujur sangkar. Determinan matriks dapat dihitung dari minor dan kofaktor pada salah satu baris atau kolom matriks.

Penentuan determinan berbasis baris matriks

Menghitung determinan suatu matriks menggunakan salah satu baris matriks.

Contoh :

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor pada baris 1

A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Solusi :

Det A = (1).$(-1)^{1+1}$ M_{12} + (0).$(-1)^{1+3}$ M_{13}

Det A = (1).$(-1)^{2}$ $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (5).(-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (0).(-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

= (1).(1).(0-2) + (-5)(-1)(0-0)(-4-0)

= -2 + 0 + 0 = -2

2.5.4 Metode CHIO

Perhitungan matriks dengan metode CHIO dapat di terapkan pada semua matriks bujur sangkar. Asalkan elemen pada A_{11} tidak sama dengan nol ($a_{11} \neq 0$). Metode CHIO menghitung determinan matriks dengan cara mendekomposisi determinan yang akan dicari menjadi sub-sub determinan derajat dua (2x) menggunakan elemen matriks baris ke-1 sebagai titik tolaknya.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi :

$$\text{Det A} = \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Det A = 0 – 2 = -2

2.5.5 Metode eliminasi gauss

Determinan matriks segitiga bawah

Eliminasi gauss merubah suatu matriks menjadi segitiga bawah (L) melalui operasi baris elementer (OBE).

Contoh :

Hitung determinan matriks matriks berikut : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & 0 \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{14}(\text{-}2) \\ b_{24}(\text{-}1) \\ b_{34}(\text{-}2)}} \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{13}(1) \\ b_{23}(\text{-}1)}}$$

Jadi det A = I_{11} X I_{22} X I_{33} X I_{44} = 3 X 2 X 1 X 1 = 6

Determinan matriks segitiga atas

Eliminasi gauss merubah matriks menjadi matriks segitiga atas (U) menggunakan operasi baris elementer (OBE).

Contoh :

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{12} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix} = U$$

Solusi :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{21}(1) \\ b_{31}(\text{-}2) \\ b_{41}(\text{-}3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{b_{32}(3) \\ b_{42}(2)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_{43}\text{-}2/7} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

Jadi, det A = U_{11} X U_{22} X U_{33} X U_{44} = 1 X (-2) X 7 X 2 = -28

2.5.6 Sifat determinan matriks

ada beberapa determinan matriks yaitu :

jika A^T Transpose dari matriks A maka det (A) = det ($A^{T)}$

Contoh :

Tentukan determinan matriks A dan transposenya

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Solusi :

Det A = $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ = -20 – 21 = 41

Det A^T = $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$ = -41

jika elemen satu baris (kolom) matriks A = 0 maka det (A) = 0

Contoh :

Determinan matriks yang mempunyai elemen pada salah satu atau lebih baris adalah nol

$A = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Solusi :

Det A $= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

2.6 Invers matriks

2.6.1 Definisi invers matriks

Jika A adalah matriks ukuran nxn dan jika ada matriks B ukuran nxn sedemikian rupa sehingga :

$[A\,B = BA = I]$

Dimana I adalah matriks identitas ukuran nxn. Maka matriks A disebut non singular atau invertibel dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A.

2.6.2 Metode substitusi

Invers matriks diperoleh dari penyelesaian persamaan matriks AA^{-1} yang kemudian diturunkan mrnjadi beberapa persamaan linear.

2.6.3 Sifat-sifat matriks invers

Jika A dan B non singular atau invertibel, maka :

$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

A matriks bujur sangkar maka :

A^n = (A.A.A,…A) → n faktor

A^0 = 1

A^{-1} = $(A^{-1})^n$ = $\{A^{-1} \quad A^{-1} \quad A^{-1}\}$ n faktor

$(A^{-1})^{-1}$ = A

$(P\text{-}A)^{-1}$ = $P^{-1}.A^{-1}$ = 1 / PA^{-1}

Am.An = A^{m+n}

$(A^n)^m$ = A^{nm}

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}$?

$A.A^{-1}$ = 1

Misalkan

$A^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a + 2c = 1 & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a + 2c = 1 \quad b + 2d = 0$
$3a + 4c = 0 \quad 3b + 4d = 1$

2.7 penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode cramer

Persamaan linear yaitu AX = B dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Metode (aturan) cramer memberikan suatu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear melalui penggunaan determinan.

Rumusnya : $X_1 = \left| \frac{A_i}{A_j} \right|$

2.8 aplikasi dalam bisnis dan manajemen

Contoh :

Buatlah persamaan berikut ini dalam bentuk matriks !

$2x_1 \quad + x_2 - \ x_3 = \ -1$

$-x_1 \quad + 4x_2 - \ x_3 = 15$

$3x_1 \quad + 3x_2 - \ 2x_3 = \ -8$

Solusi :

Bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \\ -8 \end{bmatrix}$$

BAB III
PENUTUP

3.1 Kesimpulan

Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang diatur dalam baris-baris dan kolom-kolom berbentuk persegi panjang serta termuat diantara sepasang tanda kurung. Jenis-jenis matriks dapat dibedakan berdasarkan susunan elemen matriks dan berdasarkan sifat dari operasi matriks.operasi pada matriks dapat dilakukan dengan cara penjumlahan,pengurangan dan perkalian langsung. Dekomposisi matriks adalah transformasi atau modifikasi dari suatu matriks menjadi matriks segitiga bawah (L) dan atau matriks segitiga atas (U).

3.2 Saran

Demikian yang dapat saya paparkan mengenai materi yang menjadi pokok bahasan dalam makalah ini, tentunya masih banyak kekurangan dan kelemahannya,kerena terbatasnya pengetahuan dan kurangnya rujukan atau referensi yang ada hubungannya dengan judul makalah ini.Penulis banyak berharap para pembaca yang budiman sudi memberikan saran yang membangun kepada penulis demi sempurnanya makalah ini dan dan penulisan makalah di kesempatan-kesempatan berikutnya.Semoga makalah ini berguna bagi penulis pada khususnya juga para pembaca yang budiman pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bintang Kalangu, Josep. 2005. *Matematika ekonomi untuk bisnis*. Edisi ke-1. Jakarta: Penerbit Salemba Empat.

C.Chiang. alpha dan Kevin Wainwright. 2006.*Dasar-Dasar Matematika Ekonomi*. edisi ke-4 jilid 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Gazali,Wikaria. 2005. *Matriks dan transpormasi linear*. edisi ke-1. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Mairy,Du. 2007. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE-YOGYAKARTA.

Ruminta. 2009. *Matriks persamaan linear dan pemrograman linear*. edisi ke-1. Bandung. Penerbit Rekayasa Sains.

Sarjono,Haryadi dan Sanny,Lim. 2012. *Aplikasi Matematika untuk Bisnis dan Manajemen*. Jakarta: Penerbit Salemba Empat.